Απειροστικός Λογισμός Ι   Μάθημα 2   ①

07/10/2015

Πρόταση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

Δευτέρα 11-14 Αμφ 4
Τετάρτη 11-13 Αμφ 3

(i) $a = \sup A$

(ii) α) Το a είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

β) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ τ.ω. $x > a - \varepsilon$.

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $a = \sup A$.

Τότε, το α) ισχύει από τον ορισμό του supremum.

Δείχνουμε ότι ισχύει το β). Έστω $\varepsilon > 0$

Υποθέτουμε ότι $\nexists x \in A$ με $x > a - \varepsilon$. Τότε $\forall x \in A : x \leq a - \varepsilon$.

Άρα, ο αριθμός $a - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

Από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι ο αριθμός $a - \varepsilon \geq a \Rightarrow \varepsilon \leq 0$ Άτοπο!

Συνεπώς, $\exists x \in A$ τ.ω. $x > a - \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε τώρα πως ισχύουν τα α), β) του (ii).

Τότε, το a είναι άνω φράγμα του A.

Υποθέτουμε ότι το $a \neq \sup A$. Τότε, $\exists b$ άνω φράγμα του συνόλου A τ.ω. $b < a$.

Θέτω $\varepsilon = a - b > 0$. Άρα, από το β) $\exists x \in A$ με $x > a - \varepsilon$.

Δηλαδή, $x > a - (a - b) \Rightarrow x > b$. Άτοπο! Διότι το b είναι άνω φράγμα του A.

Άρα, $a = \sup A$.

Πρόταση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $a = \inf A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ τ.ω. $x < a + \varepsilon$.

Απόδειξη: Άσκηση

Πρόταση: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο έχει infimum.

Σκιαγράφηση της απόδειξης: Έστω A μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $B = \{-x \ : x \in A\}$. Τότε, το B είναι μη κενό και άνω φραγμένο, άρα από το αξίωμα της πληρότητας, έχει supremum. Θέτω $\lambda = \sup B$. Αποδεικνύεται ότι $-\lambda = \inf A$.

⇒ Ένα σύνολο λέγεται φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

__Άσκηση 1:__ Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ώστε $\sup A = \inf A$. Τι συμπεραίνετε;

__Απόδειξη:__ Θ.δ.ο. το A είναι μονοσύνολο.

Υποθέτουμε ότι αυτό δε συμβαίνει.

Τότε, υπάρχουν $a, b \in A$ με $a \neq b$. Τότε, $a < b$ ή $a > b$.

Έστω $a < b$. Τότε, το $\inf A \leq a < b \leq \sup A \Rightarrow \inf A < \sup A$ Άτοπο!

Ομοίως και για $a > b$.

Επομένως, το A είναι μονοσύνολο.

__Άσκηση 2:__ Δίνονται δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τα A, B, τ.ω. το B να είναι φραγμένο και $A \subseteq B$ με $A \neq \emptyset$. Ν.δ.ο. (i) Το A είναι φραγμένο (ii) $\sup A \leq \sup B$ (iii) $\inf B \leq \inf A$.

__Απόδειξη:__ (i),(ii) Το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, άρα άνω φράγμα του B και $\forall x \in A$ ισχύει $x \in B$, άρα $x \leq \sup B$. Δηλαδή, ο αριθμός $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Από το αξίωμα της πληρότητας, το A έχει supremum. Εφόσον, $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A, προκύπτει ότι $\sup A \leq \sup B$.

(i),(iii) Το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B, άρα $\forall x \in A$ ισχύει $x \in B$. Άρα, $x \geq \inf B$. Δηλαδή, ο αριθμός $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A. Το A έχουμε αποδείξει πως έχει infimum. Εφόσον, $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A, προκύπτει $\inf B \leq \inf A$.

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΚΑΙ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Θα ορίσουμε τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ ως υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, \underset{1+1}{2}, \underset{1+1+1}{3}, \dots\}$ είναι το σύνολο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί η μαθηματική επαγωγή.

__Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής (ΑΜΕ):__

Αν p μια ιδιότητα που αφορά * αριθμούς ώστε:

(1) η $p(1)$ ισχύει

(2) αν ισχύει $p(k)$, τότε ισχύει $p(k+1)$

Τότε, η $p(x)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό x.

Φυσικοί Αριθμοί είναι οι αριθμοί $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ κ.λ.π.

Το ζήτημα είναι να βρεθεί ένας αυστηρός ορισμός που να καλύπτει το "κ.λ.π."

<u>Ορισμός</u>: Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό σύνολο αν (i) $1 \in A$ (ii) Αν $n \in A$ τότε $n+1 \in A$.

<u>Παραδείγματα</u>: → Το $\mathbb{R}$

→ $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

→ $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

<u>Παρατήρηση</u>: Η τομή επαγωγικών συνόλων είναι επαγωγικό σύνολο.

<u>Ορισμός</u>: Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται <u>φυσικός αριθμός</u> αν ανήκει σε όλα τα επαγωγικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{N}$ την τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\min \mathbb{N} = 1$.

Η ΑΜΕ χρησιμοποιείται
- σαν μέθοδος απόδειξης
- σαν μέθοδος ορισμού εννοιών (καλείται αναδρομικός ορισμός)

<u>Ορισμός δύναμης</u>: Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{R}$.

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\text{-φορές}}$ Πρέπει να είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ίδιο ορισμό, χωρίς τη χρήση αποσιωπητικών.

$a^1 = a$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$

[Επίσης ορίζεται $a^0 = 1$, για $a \neq 0$]

<u>Ορισμός του $n!$</u>:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$1! = 1$

$(n+1)! = n!(n+1)$

[Επίσης ορίζουμε το $0! = 1$]